Calcul ombral et analyse p-adique

Bertin DIARRA

Introduction

L'objet principal du calcul ombral, en liaison avec la classification de certaines suites de polynômes, est l'étude des opérateurs de composition : ce sont les opérateurs linéaires sur l'espace des polynômes qui commutent avec les opérateurs de translation. La généralisation à des espaces de fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes n'est pas toujours aisée, mais permet néamoins d'obtenir certains développements asymptotiques. Tandis que la généralisation à l'espace des fonctions continues sur l'anneau des entiers p-adiques à valeurs p-adiques se fait de façon aisée et satisfaisante. Une explication de ce phénomène est due au formalisme de la théorie des cogèbres.

-I- Les opérateurs de composition

Soit K un corps de caractéristique zéro. Pour tout polynôme $p \in K[x]$ et tout élément $a \in K$, on a la formule de Taylor $f(X+a) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} X^n$. Considérant $K[X]$ comme sous-anneau de l'anneau des polynômes à deux indéterminées $K[X,Y]$ et désignant par D l'opérareur de dérivation usuelle des polynômes $D(f) = f'$, on peut écrire la formule de Taylor dans $K[X,Y]$: $f(X+Y) = \sum_{n\geq 0} \frac{D^n(f)(Y)}{n!} X^n$. Notons que l'on a de la même manière $f(X+Y) = \sum_{n\geq 0} \frac{D^n(f)(X)}{n!} Y^n$.

Considérons l'opérateur de translation τ_Y de $K[X]$ dans $K[X,Y] \simeq K[X] \bigotimes K[X]$ tel que $\tau_Y f(X) = f(X+Y)$

Définition : *Soit U un opérateur linéaire du K-espace vectoriel $K[X]$ et soit U_X l' opérateur $K[Y]$-linéaire défini sur $K[X,Y]$ qui prolonge U.*

On dit que U est un opérateur de composition si l'on a $\tau_Y \circ U = U_X \circ \tau_Y$.

N.B : On vérifie aussitôt que l'ensemble $\mathcal{C}$ des opérateurs de composition est une sous-algèbre unitaire de $End_K(K[X])$.

$- \bullet -$ La dérivation D est un opérateur K-linéaire sur l'espace vectoriel $K[X]$ qui est ponctuellement nilpotente: en d'autre termes, pour tout polynôme $f \in K[X]$, il existe un entier $n = d^\circ f$ tel que $D^j f = 0, \forall j \geq n+1$. De cette observation, on déduit que tout endomorphisme K-linéaire u de $K[X]$ s'écrit de façon unique sous forme d'une série ponctuellement finie $u = \sum_{n\geq 0} a_n(X) D^n$, avec $a_n(X) \in K[X]$. On démontre alors la proposition suivante :

Proposition : *Tout opérateur de composition U s'écrit sous la forme unique d'une série ponctuellement finie $U = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} D^n$, $b_n \in K$. De plus on a $b_n = U(X^n)(0)$.*

Conséquences :
(1) *Un élément U de $End_K(K[X])$ est un opérateur de composition si et seulement si U commute avec D.*
(2) *L'algèbre $\mathcal{C}$ des opérateurs de composition est isomorphe à l'algèbre des séries formelles $K[[t]]$ et est donc commutative.*

Exemples : Posons pour $\alpha \in K$ et $f \in K[X]$, $\tau_\alpha(X) = f(X + \alpha)$. On voit aussitôt que τ_α est un opérateur de composition et l'on a $\tau_\alpha = \sum_{j \geq 0} \frac{\alpha^j}{j!} D^j = \exp(\alpha D)$ où $exp(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} t^n$.

En particulier, on a $\tau_1 = \exp(D)$ et l'opérateur aux différences $\Delta = \tau_1 - id = exp(D) - id$ est un élémnet de $\mathcal{C}$. On a $D = \log(id + \Delta)$, où $\log(1 + t) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$.

$-\bullet\bullet-$ À tout opérateur de composition $U = \sum_{j \geq 0} b_j D^j$ tel que $b_0 = 0$ et $b_1 \neq 0$, on peut associer une unique base de $K[X]$ formée d'une suite de polynômes $(h_n)_{n \geq 0}$ tels que -(i)- $d^\circ h_n = n$, $h_0 = 1$, $h_n(0) = 0$, $\forall n \geq 1$, -(ii)- $U(h_n) = n h_{n-1}$, avec la convention $h_{-1} = 0$. On a alors -(iii)- $\tau_Y(h_n)(X) = h_n(X + Y) = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} h_i(Y) h_j(X)$.

Toute suite de polynômes $(h_n)_{n \geq 0}$ qui satisfait aux conditions (i) et (iii) est dite une suite de polynômes de type binomial et est de façon évidente une base du K-espace vectoriel $K[X]$. On associe à une telle suite un opérateur de composition U tel que $U(h_0) = 0$, $U(h_n) = n h_{n-1}$, $\forall n \geq 1$, ce qui est une réciproque à la Proposition.

Exemples : • La suite $(X^n)_{n \geq 0}$ est de type binomial et est associée à l'opérateur de dérivation D.
• Posons $(X)_0 = 1$ et $(X)_n = X(X-1)\cdots(X-n+1)$, pour $n \geq 1$ (polynômes de Pochhammer). La suite des polynômes de Pochhammer $((X)_n)_{n \geq 0}$ est une suite de type binomial et est associée à l'opérateur aux différences Δ.

Remarque : Un autre type de familles de polynômes est donné par les polynômes d'Appell. Soit $V = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} D^n$ un opérateur de composition tel que $a_0 \neq 0$. Alors V est bijectif, la suite de polynômes définis par $u_n(X) = V^{-1}(X^n)$ est la suite de polynômes d'Appell associée à V. Par exemple la suite de polynômes d'Appell associée à $V = \frac{\exp(D) - id}{D}$ est la suite des polynômes de

Bernoulli. On obtient pour les éléments $f \in K[X]$, $f(X+Y) = \sum_{n \geq n} \frac{1}{n!} V(f^{(n)}(X))u_n(Y)$ et pour des fonctions de variables réelles dérivables jusqu'à un certain ordre des développements tayloriens généralisés (c.f. [1]).

$- \bullet \bullet \bullet -$ Considérons l'application linéaire $c : K[X] \longrightarrow K[X] \bigotimes K[X]$ telle que $c(X^n) = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} X^i \otimes X^j$ et la forme linéaire $\sigma : K[X] \longrightarrow K$ définie par $\sigma(f) = f(0)$. On vérifie que $(c \otimes id) \circ c = (id \otimes c) \circ c$ et $(id \otimes \sigma) \circ c = id = (c \otimes id) \circ c$. En d'autres termes $(K[X], c, \sigma)$ est une cogèbre. On dit que c est le coproduit et σ la coünité de la cogèbre $K[X]$. Les opérateurs de composition sont alors les endomorphismes linéaires U de $K[X]$ tels que $c \circ U = (id \otimes U) \circ c = (U \otimes id) \circ c$.

Les opérateurs de composition sont les morphismes de comodule à gauche (resp. à droite) de $K[X]$ lorsque l'on considère sur $K[X]$ la structure de comodule à gauche (resp. à droite) de coproduit c.

-II- L'espace de fonctions continues p-adiques

Soit p un nombre premier. Soit pour tout entier $n \geq 1$, $v_p(n)$, l'exposant de la plus grande puissance de p qui divise n : ainsi, $n = p^{v_p(n)} n'$ et $p \not| n'$. On posera $v_p(0) = +\infty$. On voit alors que si $r = \frac{m}{n}$ est un nombre rationnel non nul, on a $r = p^{v_p(r)} \frac{m'}{n'}$, où $v_p(r) = v_p(m) - v_p(n)$.

Associons à tout $r \in \mathbb{Q}$= le corps des nombres rationnels, le nombre $|r|_p = p^{-v_p(r)}$. On définit ainsi sur $\mathbb{Q}$ une valeur absolue ultramétrique, c'est-à-dire (1) $|r|_p = 0 \Longleftrightarrow r = 0$,

(2) $|r \cdot s|_p = |r|_p |s|_p$ et (3) $|r + s| \leq \max(|r|_p, |s|_p), \forall r, s \in \mathbb{Q}$.

Le complété $\mathbb{Q}_p$ de $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue $| \ |_p$ est appelé le corps des nombres p-adiques. On pose $\mathbb{Z}_p = \{a \in \mathbb{Q}_p \ / \ |a|_p \leq 1\}$. C'est l'anneau des entiers du corps valué $\mathbb{Q}_p$; c'est donc un anneau local. Son idéal maximal est égal à $p\mathbb{Z}_p$, son corps résiduel $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$ est le corps fini à p éléments. De plus on voit que $\mathbb{Z}_p$ est un anneau topologique compact, totalement discontinu. En particulier pour l'addition, $\mathbb{Z}_p$ est un groupe topologique compact, totalement discontinu.

Considérons à l'instar de $\mathbb{Q}_p$ tout autre corps K muni d'une valeur absolue ultramétrique notée $| \ |$ tel que $(K, | \ |)$ est un corps complet. Comme pour tout groupe compact totalement discontinu, l'algèbre des fonctions continues $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ munie de la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)|$ est une algèbre de Banach ultramétrique. De plus on définit un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach Π du produit tensoriel topologique $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K) \widehat{\otimes} \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ sur $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, K)$, en posant pour $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, $x, y \in \mathbb{Z}_p$: $\Pi(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$. Soit ρ l'application linéaire de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, K)$ telle que $\rho(f)(x, y) = f(x + y)$. Posons $c = \Pi^{-1} \circ \rho$, on a ainsi un morphisme isométrique de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K) \widehat{\otimes} \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. On vérifie alors que $(c \otimes id) \circ c = (id \otimes c) \circ c$ et $(id \otimes \sigma) \circ c = id = (\sigma \otimes id) \circ c$ où $\sigma(f) = f(0)$.

En d'autres termes $(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K), c, \sigma)$ est une cogèbre de Banach. Notons que c et σ sont des morphismes d'algèbres de Banach. En fait, $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ est une algèbre de Hopf ultramétrique, d'antipode l'opérateur d'involution η défini en posant $\eta(f)(x) = f(-x)$.

Supposons à présent que K est *un sur-corps valué complet* de $\mathbb{Q}_p$, on peut identifier l'anneau des polynômes $K[X]$ avec la sous-algèbre de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ formée des fonctions polynômes. La restriction à $K[X]$ de $c = \Pi^{-1} \circ \rho$ coincide avec le coproduit de $K[X]$ défini en -I-. Les définitions données en -I- s'étendent ici en ajoutant des conditions topologiques. Ainsi, un endomorphisme K-linéaire continu U du K-espace de Banach $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ est un opérateur de composition si l'on a $\tau_x \circ U = U \circ \tau_x$, $\forall x \in \mathbb{Z}_p$, où pour $x \in \mathbb{Z}_p$, τ_x est l'opérateur de translation tel que $\tau_x f(y) = f(x+y)$, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. Ce qui équivaut aussi à dire que U est un endomorphisme du comodule, c'est-à-dire : $c \circ U = (id \otimes U) \circ c = (U \otimes id) \circ c$. On voit que U est un opérateur de composition si et seulement si $\tau_1 \circ U = U \circ \tau_1$, ou encore $\Delta \circ U = U \circ \Delta$, où $\Delta = \tau_1 - id$.

Considérons la suite des polynômes binomiaux :

$B_0(x) = 1$ et pour $n \geq 1$, $B_n(x) = \dfrac{(x)_n}{n!} = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$. On sait (théorème de Mahler) que toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ se développe de façon unique en une série uniformément convergente $f = \sum_{n \geq 0} a_n B_n$. De plus $\|f\| = \sup_{n \geq 0} |a_n|$. On dit que $(B_n)_{n \geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. Les coefficients a_n dans le développement de Mahler de f sont donnés par $a_n = \Delta^n(f)(0)$. Notons que cela se déduit de ce que $\Delta B_n = B_{n-1}$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, on a $\tau_x f = \sum_{n \geq 0} \Delta^n(f)(x) B_n$. D'où l'on déduit, comme dans la Proposition en -I-, que tout opérateur de composition U de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ s'écrit sous forme unique de série simplement convergente $U = \sum_{n \geq 0} b_n \Delta^n$, avec $b_n = U(B_n)(0)$. De plus, on a pour la norme d'opérateur linéaire continu $\|U\| = \sup_{n \geq 0} |b_n|$.

Notons que puisqu'il existe des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ dans K non dérivables, l'opérateur de dérivation D sur $K[X]$ ne se prolonge pas à $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.

Les relations $B_n(x+y) = \sum_{i+j=n} B_i(x) B_j(y)$ se traduisent en $c(B_n) = \sum_{i+j=n} B_i \otimes B_j$. Toute famille de fonctions polynômes $(E_n)_{n \geq 0}$ telle que $E_0 = 1$, et $c(E_n) = \sum_{i+j=n} E_i \otimes E_j$ est dite à puissances divisées. Si en outre $(E_n)_{n \geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, on dit que c'est une base à puissances divisées.

On obtient des assertions analogues à celles de -I- . En particulier :

Théorème de Van Hamme : *Soit* $U = \sum_{j\geq 0} b_j \Delta^j$ *un opérateur de composition de l'espace de Banach* $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ *tel que* $b_0 = 0$ *et* $\|U\| = |b_1\| = 1$.

Alors il existe une unique base orthonormale à puissances divisées de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ *formée d'une suite de polynômes* $(h_n)_{n\geq 0}$ *tels que* : -(1)- $d^\circ h_n = n,\ h_0 = 1$ *et* -(2)- $U(h_n) = h_{n-1}$, *avec la convention* $h_{-1} = 0$.

$-\bullet\bullet-$ Réciproquement, on peut associer à toute base orthonormale à puissances divisées de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, formée d'une suite de polynômes $(h_n)_{n\geq 0}$, avec $d^\circ h_n = n$, un unique opérateur de composition $U = \sum_{j\geq 1} b_j \Delta^j$ tel que $U(h_n) = h_{n-1},\ h_{-1} = 0$ et $\|U\| = |b_1| = 1$.

$\bullet\bullet-$ On peut continuer le développement du dictionnaire du calcul ombral dans chacun des deux cas ci-dessus, en sachant que les points communs sont liés à la structure de cogèbre que possède chacun des deux espaces de base, voir la brève bibliographie qui suit.

Bibliographie

[1] N. Bourbaki, *Fonctions d'une variable réelle* - Chapitre VI - C.C.L.S, Paris 1976.

[2] B. Diarra, Bases de Mahler et autres, *Séminaire d'Analyse - Université Blaise Pascal* (1994-1995) Exposé 16 - MR, 98e:46093.

[3] B. Diarra, Complete ultrametric Hopf algebras which are free Banach spaces, in *p-adic functional Analysis*, edited by W.H. Schikhof, C. Perez-Garcia, J. Kąkol, Marcel Dekker, New-York, 1997, 61-80.

[4] B. Diarra, The continuous coalgebra endomorphisms of $\mathcal{C}(\mathbf{Z}_p, K)$, *Bull. Belg. Math. Soc.*, supplement December 2002, 63-79.

[5] L. Van Hamme, Continuous operators which commute with translations, on the space of continuous functions on $\mathbb{Z}_p$, in *p-adic functional Analysis*, edited by J.M. Bayod, N. De Grande-De Kimpe and J. Martínez-Maurica, Marcel Dekker, New-York, 1991, 77-88.

[6] M. Héraoua, *Cogèbre binomiale et calcul ombral des opérateurs différentiels*, Thèse Université de Limoges - 15 juillet 2004.

[7] R. Morris (editor), *Umbral Calculus and Hopf algebras*, Cont. Math, AMS , vol.6 - 1978.

[8] A.M. Robert, *A Course in p-adic analysis*, GTM 198, Springer (2000)

[9] S. M. Roman and G-C. Rota, The Umbral Calculus, *Advances in Mathematics* 27, 1978, 95-188.

[10] G.C. Rota : *Finite operator calculus* , Academic Press -1975.

$\star\star$ Laboratoire de Mathématiques - UMR 6620

Complexe Scientifique des Cézeaux,

63 177 AUBIÈRE – FRANCE

e-mail : Bertin.Diarra@math.univ-bpclermont.fr